

2025 普通高等学校招生考试 (新高考 II)

一、单选题

1. 样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的平均数为 ()
(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 18
2. 已知 $z = 1 + i$, 则 $\frac{1}{z-1} =$ ()
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
3. 已知集合 $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$, $B = \{x \mid x^3 = x\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{0, 1, 2\}$ (B) $\{1, 2, 8\}$ (C) $\{2, 8\}$ (D) $\{0, 1\}$
4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ (B) $\{x \mid x \leq -2\}$
(C) $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ (D) $\{x \mid x > 1\}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$, 则 $A =$ ()
(A) 45° (B) 60° (C) 120° (D) 135°
6. 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 A 在 C 上, 过 A 作 C 的准线的垂线, 垂足为 B . 若直线 BF 的方程为 $y = -2x + 2$, 则 $|AF| =$ ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 则 $S_6 =$ ()
(A) -20 (B) -15 (C) -10 (D) -5
8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ (D) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q 为 $\{a_n\}$ 的公比, $q > 0$. 若 $S_3 = 7$, $a_3 = 1$, 则 ()
(A) $q = \frac{1}{2}$ (B) $a_5 = \frac{1}{9}$ (C) $S_5 = 8$ (D) $a_n + S_n = 8$
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 ()
(A) $f(0) = 0$
(B) 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
(C) $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$
(D) $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 且 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 则 ()
(A) $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$
(B) $|MA_1| = 2|MA_2|$
(C) C 的离心率为 $\sqrt{13}$
(D) 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题

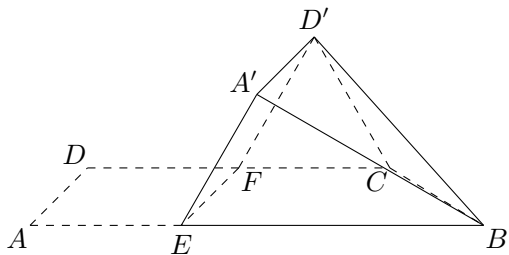
12. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (x-1, 2x)$, 若 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 $|\mathbf{a}| =$ _____.
13. 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) =$ _____.
14. 一个底面半径为 4 cm, 高为 9 cm 的封闭圆柱形容器 (容器壁厚度忽略不计) 内有两个半径相等的铁球, 则铁球半径的最大值为_____cm.

四、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), $f(0) = \frac{1}{2}$.
(1) 求 φ ;
(2) 设函数 $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.
(1) 求 C 的方程;
(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 的中点, 点 E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD$, $CD = 2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCD$ 所成的二面角为 60° .
- (1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$;
- (2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.



18. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, 其中 $0 < k < \frac{1}{3}$.
- (1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点;
- (2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点.
- ① 设函数 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$. 证明: $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减;
- ② 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

19. 甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 p ($\frac{1}{2} < p < 1$), 乙胜的概率为 q , $p+q=1$, 且各球的胜负相互独立. 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.
- (1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);
- (2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;
- (3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.